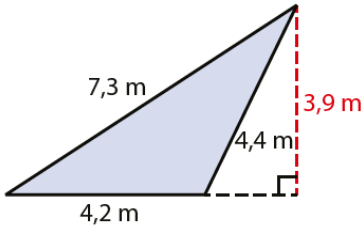


4.1

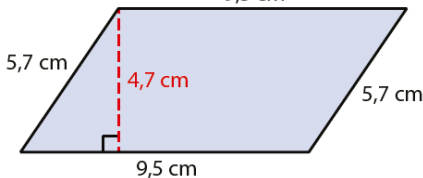
- a) Kuvio on kolmio, jonka kannan pituus on 4,2 m ja korkeus 3,9 m.



$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ah && \text{Sijoitetaan } a = 4,2 \text{ ja } h = 3,9. \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot 3,9 \\ &\approx 8,2 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on 8,2 m².

- b) Kuvio suunnikas, jonka kannan pituus on 9,5 cm ja korkeus 4,7 cm.



$$\begin{aligned} A &= ah && \text{Sijoitetaan } a = 9,5 \text{ ja } h = 4,7. \\ &= 9,5 \cdot 4,7 \\ &\approx 45 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

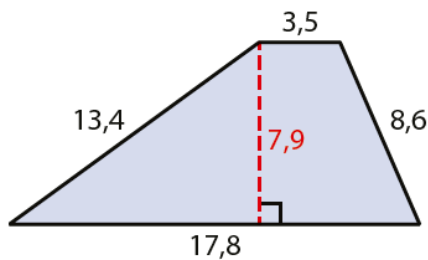
Suunnikkaan pinta-ala on 45 cm².

Vastaus

- a) 8,2 m²
b) 45 cm²

4.2

Kuvio on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 17,8 ja 3,5 ja jonka korkeus on 7,9.



$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2} \cdot h && \text{Sijoitetaan } a = 17,8, b = 3,5 \text{ ja } h = 7,9. \\ &= \frac{17,8 + 3,5}{2} \cdot 7,9 \\ &\approx 84 \end{aligned}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on 84.

Vastaus

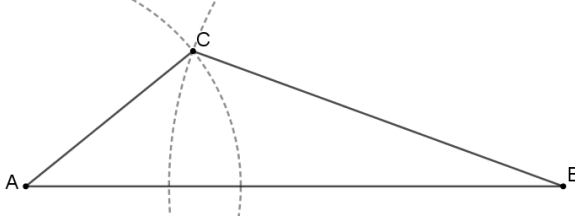
Pinta-ala on 84.

4.3

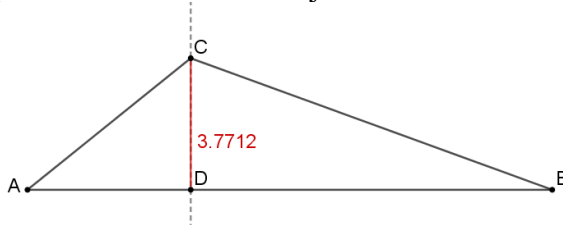
Sivujen pituudet ovat 6, 11 ja 15.

Valitaan piirrettävän kolmion kannaksi (esimerkiksi) pisin sivu.

Piirretään jana, jonka pituus on 15, ja sen päätepisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat 6 ja 11. Kolmion kolmas kärki löytyy ympyröiden leikkauspisteestä. Piirretään monikulmio kolmion kärkipisteiden avulla.



Piirretään kolmion kannalle normaali, joka kulkee kolmion kolmannen kärjen kautta. Etsitään normaalin ja kolmion kannan leikkauspiste ja piirretään kolmion korkeusjana.

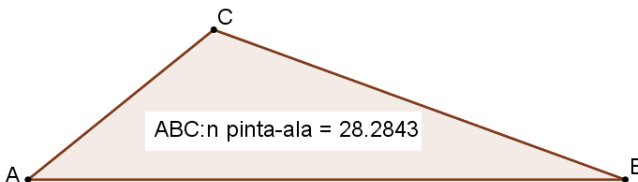


Mittaamalla korkeusjanan pituudeksi saadaan 3,7712.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3,7712 \qquad A = \frac{1}{2} ah, \text{ missä } a = 15 \text{ ja } h = 3,7712.$$
$$\approx 28,3$$

Tarkistetaan tulos geometriaohjelmalla. Mittaamalla kolmion pinta-alaksi saadaan $A \approx 28,3$.



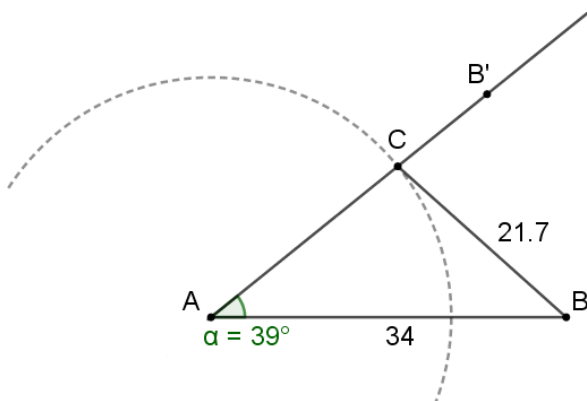
Vastaus

Pinta-ala on 28,3.

4.4

Piirretään jana, jonka pituus on 34 ja sen toiseen päätepisteeseen ympyrä, jonka säde on 23. Piirretään 39° asteen kulma em. päätepisteeseen.

Piirretään kolmion kolmas kärki ympyrän ja piirretyn kulman toisen kyljen leikkauspisteeseen.



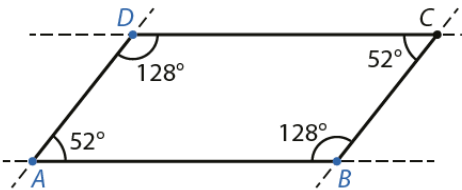
Kolmion kolmannen sivun pituus on 21,7.

Vastaus

Kolmannen sivun pituus on 21,7.

4.5

- a) Piirretään suora AB . Piirretään piste C , joka ei ole suoralla AB .
Piirretään suora BC . Piirretään pisteen C kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran AB kanssa. Piirretään pisteen A kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran BC kanssa.
Suunnikkaan neljäs kärki D on kahden viimeksi piirretyn suoran leikkauspiste. Piirretään suunnikas $ABCD$.



Säädetään kulma A suuruudeksi 52° ja mitataan muiden kulmien suuruudet.

Kulmien suuruudet ovat 52° ja 128° .

- b) Ei voi olla, koska suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja vierekkäisten kulmien summa on 180° ($64^\circ + 126^\circ = 190^\circ \neq 180^\circ$).

Vastaus

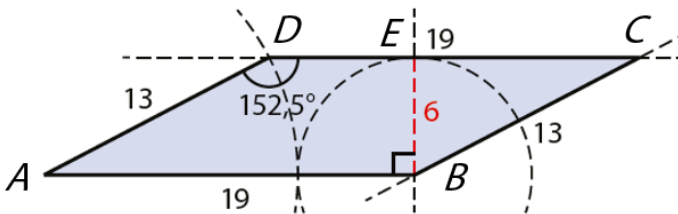
- a) Kulmien suuruudet ovat 52° ja 128° .
b) Ei ole, koska suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja vierekkäisten kulmien summa on 180° .

4.6

- a) Piirretään jana AB , jonka pituus on 19 ja pisteeseen A ympyrä, jonka säde on 13. Piirretään pisteeseen B janan AB normaali ja ympyrä, jonka säde on 6.

Piirretään ympyrän ja normaalin leikkauspiste E . Piirretään pisteen E kautta janan AB kanssa yhdensuuntainen suora ja piste D tämän suoran ja pisteeseen A piirretyn ympyrän leikkauspisteeseen.

Piirretään janan AD kanssa yhdensuuntainen suora pisteen B kautta. Piste C on tämän suoran ja suoran DE leikkauspisteessä.



Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.

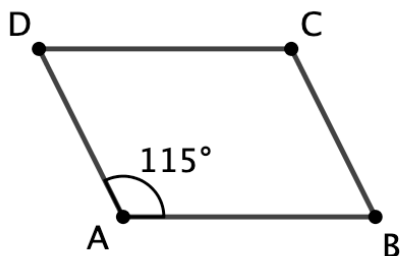
$$\begin{aligned} A &= ah \\ &= 19 \cdot 6 \\ &= 114 \end{aligned}$$

- b) Suurimman kulman suuruus on $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 152,5^\circ$.

Vastaus

- a) 114
b) $152,5^\circ$

4.7



Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten

$$\sphericalangle C = \sphericalangle A = 115^\circ.$$

Suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on 180° .

Lasketaan suunnikkaan kahden muun kulman suuruus.

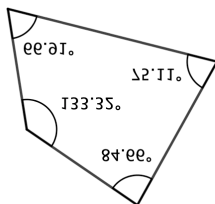
$$\begin{aligned}\sphericalangle B &= \sphericalangle D \\ &= 180^\circ - \sphericalangle C \\ &= 180^\circ - 115^\circ \\ &= 65^\circ\end{aligned}$$

Vastaus

115° , 65° ja 65°

4.8

a)



Kulmien summa on 360° . Muodon muuttaminen ei vaikuta kulmien summaan.

b) Jokainen nelikulmio voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi.

Kolmion kulmien summa on 180° , joten nelikulmion summa on aina $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

Vastaus

a) Nelikulmion kulmien summa on 360° .

b) Jokainen nelikulmio voidaan jakaa kahdeksi kolmioksi. Kolmion kulmien summa on 180° , nelikulmion summa on aina $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

4.9

- a) Kuvio on neljäkäs, jossa ei ole suoria kulmia, joten se on myös suunnikas, puolisuunnikas ja nelikulmio.

Vaihtoehdot 1, 2, 4 ja 8 ovat oikein.

- b) Kuvio on tasasivuinen kolmio, joten se on säännöllinen monikulmio ja kolmio.

Vaihtoehdot 3 ja 6 ovat oikein.

- c) Kuvio on puolisuunnikas, joten se on myös nelikulmio.

Vaihtoehdot 2 ja 8 ovat oikein.

- d) Kuvio on nelikulmio, joka ei täytä muiden vaihtoehtojen ehtoja.

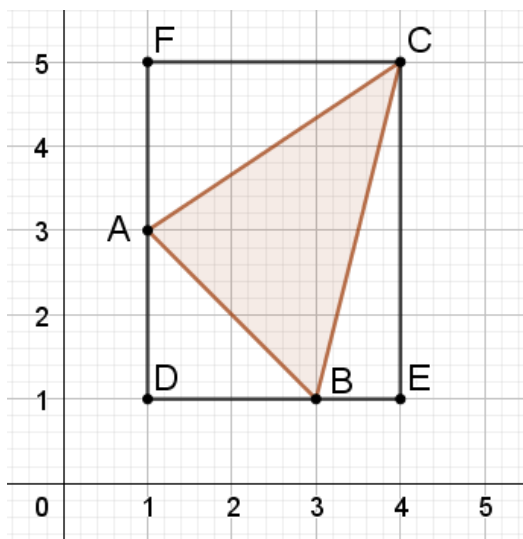
Vaihtoehto 8 on oikein.

Vastaus

- a) 1, 2, 4 ja 8
- b) 3 ja 6
- c) 2 ja 8
- d) 8

4.10

Piirretään kolmion ympärille suorakulmio.



Lasketaan väritetyn kolmion pinta-ala vähentämällä suorakulmion pinta-alasta värittämättömien kolmioiden pinta-alat. Luetaan mitat kuvasta.

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{DECF} - A_{ADB} - A_{BEC} - A_{ACF} & A &= \frac{1}{2}ah \\ &= 3 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on 5.

Vastaus

Pinta-ala on 5.

4.11

- a) Monikulmio on suunnikas, jonka kannan pituus on 3,1 m ja korkeus 3,2 m.

$$\begin{aligned} A &= ah \\ &= 3,1 \cdot 3,2 \\ &\approx 9,9 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Monikulmion pinta-ala on 9,9 m².

- b) Monikulmio on nelikulmio, joka koostuu neljästä keskenään yhdenmuotoisesta suorakulmaisesta kolmiosta, joiden kannan pituus on 3,9 m ja korkeus 6,3 m.

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \frac{1}{2} ah \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,9 \cdot 6,3 \\ &\approx 49 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Monikulmion pinta-ala on 49 m².

- c) Monikulmio on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 3,1 m ja 10,2 m ja jonka korkeus on 3,0 m.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2} \cdot h \\ &= \frac{3,1+10,2}{2} \cdot 3,0 \\ &\approx 20 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Monikulmion pinta-ala on 20 m².

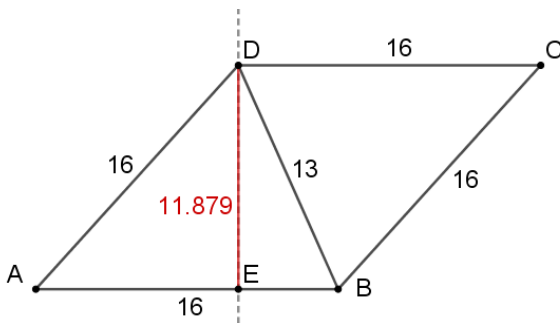
Vastaus

- a) 9,9 m²
b) 49 m²
c) 20 m²

4.12

Piirretään jana AB , jonka pituus on 16 ja pisteisiin A ja B ympyrät, joiden säteet ovat 16 ja 13. Merkitään näiden ympyröiden leikkauspiste D . Piirretään pisteisiin B ja D ympyrät, joiden säteet ovat 16 ja 16. Merkitään näiden ympyröiden leikkauspiste C . Piirretään neljäkäs $ABCD$.

Piirretään janalle AB normaali, joka kulkee pisteen D kautta. Merkitään normaalin ja janan AB leikkauspiste E . Piirretään jana DE ja mitataan sen pituus.



Neljäkkään korkeus on $11,879 \approx 11,9$.

Neljäkäs on suunnikas.

$$\begin{aligned} A &= ah \\ &= 16 \cdot 11,879 \\ &\approx 190 \end{aligned}$$

Neljäkkään pinta-ala on 190.

Vastaus

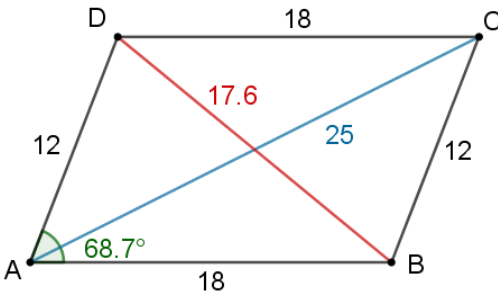
korkeus 11,9; pinta-ala 190

4.13

- a) Piirretään jana AB , jonka pituus on 18. Piirretään janan päätepisteeseen A ympyrät, joiden säteet ovat 12 ja 25 ja päätepisteeseen B ympyrä, jonka säde on 12.

Merkitään B -keskisen ympyrän ja A -keskisen suuremman ympyrän leikkauspiste C . Piirretään pisteen C kautta janan AB kanssa yhdensuuntainen suora.

Merkitään A -keskisen pienemmän ympyrän ja edellä piirretyn yhdensuuntaisen suoran leikkauspiste D . Yhdistämällä pisteet A, B, C ja D muodostuu suunnikas $ABCD$.



Lyhyemmän lävistäjän pituus on 17,6.

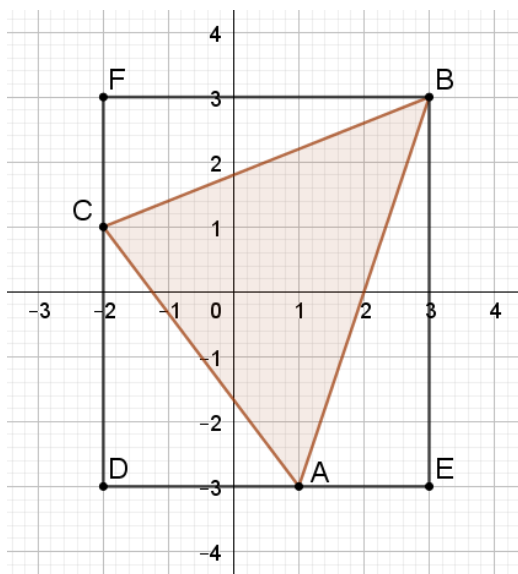
- b) Pienimmän kulman suuruus on $68,7^\circ$.

Vastaus

- a) lyhyemmän lävistäjän pituus 17,6
b) pienimmän kulman suuruus $68,7^\circ$

4.14

Piirretään kolmion ympärille suorakulmio.



Lasketaan väritetyin kolmion pinta-ala vähentämällä suorakulmion pinta-alasta värittämättömien kolmioiden pinta-alat.

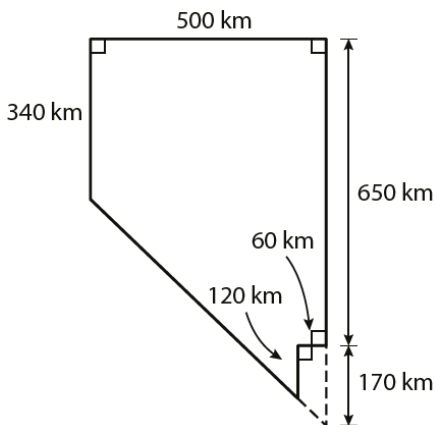
$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{DEBF} - A_{CDA} - A_{AEB} - A_{CBF} \\ &= 5 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Vastaus

pinta-ala 13

4.15

Nevadan muoto on likimain puolisuunnikas, josta on poistettu pienempi puolisuunnikas.



Merkitään suuremman ja pienemmän puolisuunnikkaan pinta-aloja A_s ja A_p . Lasketaan Nevadan pinta-ala.

$$\begin{aligned}
 A_N &= A_s - A_p & A_{\text{suunnikas}} &= \frac{a+b}{2} \cdot h \\
 &= \frac{(650+170)+340}{2} \cdot 500 - \frac{170+120}{2} \cdot 60 \\
 &\approx 280\,000 \text{ (km}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

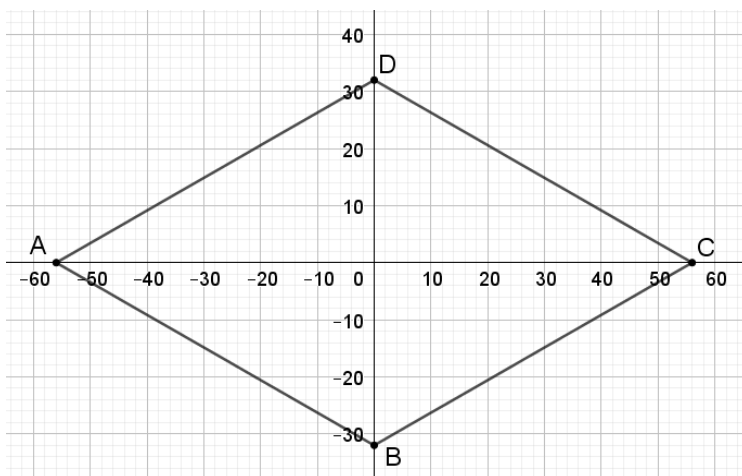
Nevadan pinta-ala on 280 000 km².

Vastaus

280 000 km² (Nevadan todellinen pinta-ala on 286 180 km².)

4.16

a) Leija on neljäkäs.



b) Leijan pinta-ala koostuu neljästä suorakulmaisesta kolmiosta, joiden kannan pituus on 56 cm ja korkeus 32 cm.

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 32$$
$$\approx 3600 \text{ (cm}^2\text{)}$$

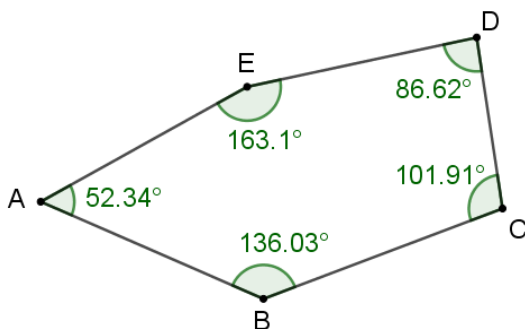
Vastaus

a) neljäkäs

b) 3600 cm^2

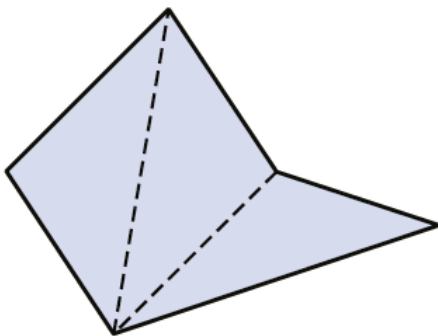
4.17

a) Piirretään viisikulmio.



Viisikulmion kulmien summa on 540° , eikä muodon muuttaminen vaikuta summan suuruuteen.

b) Jokainen viisikulmio voidaan jakaa samasta kärjestä lähtevillä lävistäjillä kolmeen kolmioon. Kolmion kulmien summa on 180° , joten viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.



c) Kuusikulmion kulmien summa on $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

d) n -kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Vastaus

a) Viisikulmion kulmien summa on 540° .

b) Jokainen viisikulmio voidaan jakaa samasta kärjestä lähtevillä lävistäjillä kolmeen kolmioon. Kolmion kulmien summa on 180° , joten viisikulmion kulmien summa on $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

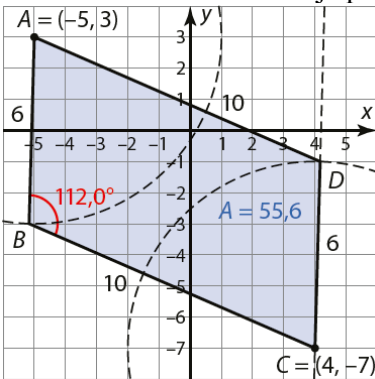
c) Kuusikulmion kulmien summa on $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

d) n -kulmion kulmien summa on $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

4.18

a) Piirretään suunnikas.

Piirretään ensin pisteet A ja C . Koska sivun AB pituus on 6, myös sivun CD pituus on 6. Piirretään pisteisiin A ja C ympyrät, joiden säde on 6. Piirretään piste B A -keskisen ympyrän kehälle. Piirretään janat AB ja BC . Piirretään janojen kanssa yhdensuuntaiset suorat pisteisiin A ja C ja näiden leikkauspisteeseen piste D . Siirretään pistettä B niin, että sivun BC pituus on 10 ja mitataan suunnikkaan suurin kulma ja pinta-ala.

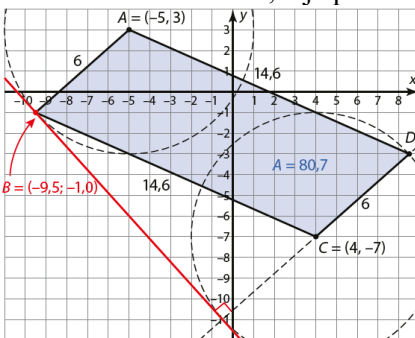


Suurin kulma on $112,0^\circ$ ja pinta-ala 55,6.

b) Valitaan kannaksi sivu, jonka pituus on 6.

Koska kannan pituus pysyy vakiona, pinta-ala on suurin, kun suunnikkaan korkeus on suurin.

Pinta-ala on tällöin 80,7 ja piste $B = (-9,5; -1,0)$.



Vastaus

a) Suurin kulma on $112,0^\circ$ ja pinta-ala 55,6.

b) Suunnikkaan suurin pinta-ala on 80,7 ja tällöin piste $B = (-9,5; -1,0)$.

4.19

- a) Kolmion kulmien summa on 180° .
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$x + 2x + 3x = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

Lasketaan kolmion kulmien suuruudet.

$$x = 30^\circ$$

$$2x = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

$$3x = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$$

- b) Kolmio on suorakulmainen, joten sen kaksi lyhintä sivua ovat sen kanta ja korkeus.

$$A = \frac{1}{2}ah$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12$$

$$= 54$$

Vastaus

- a) 30° , 60° ja 90°
b) pinta-ala 54

4.20

Koko neliön sivun pituus on 10,00 cm. Lasketaan yhden pikkuruudun sivun pituus.

$$\frac{10,0}{4} = 2,50 \text{ (cm)}$$

Tunnistetaan osan muoto, luetaan mitat kuvasta ja lasketaan osan pinta-ala.

Osa A on suorakulmainen kolmio.

$$A_A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Osa B on osan A kanssa yhtenevä kolmio.

Niiden pinta-alat ovat siis yhtä suuret.

$$A_B = A_A = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Osat C ja E ovat yhtenevät suorakulmaiset kolmiot.

Lasketaan niiden pinta-alat.

$$A_C = A_E = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2,5 = 6,25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Osa D on neliö, joka muodostuu neljästä puolikkaasta pikkuneliöstä.

$$A_D = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Osa F on suunnikas.

$$A_F = 5 \cdot 2,5 = 12,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Osa G on suorakulmainen kolmio.

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 12,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Varmistetaan tulos laskemalla osien summa. Summan pitää olla yhtä suuri kuin koko neliön pinta-ala eli $10 \cdot 10 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$.

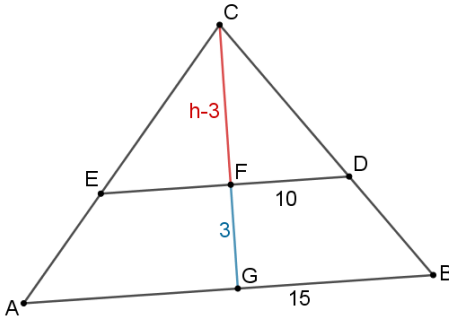
$$25 + 25 + 6,25 + 6,25 + 12,5 + 12,5 + 12,5 = 100 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus

Osa	Pinta-ala (cm ²)
A	25
B	25
C	6,25
D	12,5
E	6,25
F	12,5
G	12,5

4.21

- a) Merkitään kolmion ABC korkeusjanan pituutta kirjaimella h . Piirretään kuva.



Kolmioilla ABC ja EDC on yhteinen kulma C ja kolmioiden samankohtaiset kulmat A ja E ovat yhtä suuret. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Ratkaistaan kolmion ABC korkeus h .

$$\frac{h-3}{h} = \frac{10}{15}$$

Vastinpituuksien suhteet ovat yhtä suuret.
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 9$$

- b) Lasketaan kolmion ABC pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 9$$

$$= 67\frac{1}{2}$$

$$= 67,5$$

Vastaus

- a) korkeus 9

- b) pinta-ala $67\frac{1}{2}$ ($= 67,5$)